Część 7 - granice funkcji, ciągłość funkcji

1. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4}{x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{x+\frac{1}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$

e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}$

f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-4x^3-3x^2+18x}{2x^3-19x^2+60x-63}$

h) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2+2x+3}{6x^2-7x}$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3+x^2}{5x^2-1}$

l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^4+1}{5x^2-x}$

m) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x-5}$

n) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{2}{\cos x}}$

2. Oblicz granicę:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{3x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{7x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 5x}{\operatorname{tg}^2 6x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x}{\cos 3x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(2^x+1)}{\ln(3^x+1)}$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1})$

3. Oblicz granice jednostronne funkcji f w punkcie x_0:

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $x_0 = 3$

b) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$, $x_0 = 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = \dfrac{-4}{x-3}$, $x_0 = 3$

e) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 1$

f) $f(x) = 4^{\frac{1}{x^2-4}}$, $x_0 = 2$

g) $f(x) = \ln \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-3x+9}{x^2-9}$, $x_0 = 3$

4. Zbadać ciągłość funkcji f, gdy:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \langle 0, 1\rangle \\ 2 - x^2 & \text{dla } x \in (1, 2\rangle \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x < 1 \\ \log x & \text{dla } x \geqslant 1 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5} & \text{dla } x \neq -5 \\ -10 & \text{dla } x = -5 \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

e)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -x + 1 & \text{dla} x > 0 \end{cases}$$

5. Dobrać tak parametr a, aby funkcja f była ciągła na zbiorze liczb rzeczywistych:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 8 & \text{dla } x \leqslant 0 \\ (x - a)^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{dla } x < -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + 1 & \text{dla } x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$