

## Część 6 - ciągi

1. Z badać monotoniczność poniższych ciągów:

a)  $a_n = \frac{n^2 + 1}{n!}$

b)  $a_n = \frac{2n + 3}{4n + 1}$

c)  $a_n = 3^n + (-2)^n$

d)  $a_n = \frac{(n + 1)!}{2^n}$

2. Wykazać, że ciąg  $(a_n)$ , dla  $n \in \mathbb{N}$ , nie ma granicy:

a)  $a_n = 2 + (-1)^n$

b)  $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

c)  $a_n = (-1)^n \frac{7n^5 + 3n^2 + 8}{3n^5 - 4n^4 + 18n}$

d)  $a_n = (n + (-1)^n \cdot n^2)$

3. Obliczyć granicę:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 3}{-5n + 6}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n - 1)(n + 3)}{3n^2 + 5}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 5n + 1}{7n^4 - 3n^3 + 2}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 5}{2n^3 + 7n + 2}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n + 5}$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 1)(n + 3)}{3n^2 + 5}$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 1)^2}{(4n - 1)(3n + 2)}$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n - 1)^3}{(4n - 1)^2(1 - 5n)}$

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 1}{n^2 - n + 1}$

j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n + 1}{1 - 5n^2}$

k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n - 1)(n + 1)(n^2 + 2)}{(3n^2 + 1)(2n + 1)(5n - 2)}$

l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n - 3}{3n + 1} \right)^2$

m)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n - 2}{3n - 1} \right)^3$

n)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n - 2}{n + 10}}$

o)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n - 1}{8n + 10}}$

p)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{n}$

q)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1} - \sqrt{4n^2 + 3}}{3n + 5}$

r)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 2n^2} - \sqrt{1 + 4n^2}}{n}$

s)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 2}{3n + 5}$

t)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{3n - 2}$

u)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 1}}$

w)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3 - n - n}}$

4. Obliczyć granicę:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^{2n} - 1}{4 \cdot 9^n + 7}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 9^n + 3 \cdot 4^{n-1} - 3}{5^{n+1} + 6 \cdot 7^n + 1}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^{2n+2} - 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3}$

5. Obliczyć granicę:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (6n^8 + 4n^3 + 3n^2 - 7n)$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6n^8 + 4n^3 + 3n^2 - 7n}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6n^8 + 4n^3 + 3n^2 - 7n}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 1} - \sqrt{4n^2 + 3})$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \cdot \ln \left( 1 + \frac{3}{n} \right) \right)$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 2n}{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}$

6. Obliczyć granicę:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 3})$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}})$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{25^n + 5^n} - \sqrt{25^n + 4})$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n})$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + 2n - 5} - n\sqrt{3})$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 6n - 15})$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 2})$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 4n^2} - n)$

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt[3]{8n^3 + 5n^2 + 1})$

j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2n^3 + 5n^2 - 7})$

7. Obliczyć granicę:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n+4} \right)^{3n}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-4}{n} \right)^{-n+3}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 2n - 3}{n^2 + 4n - 2} \right)^{7n-4}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n-1}{5n+2} \right)^{10n-1}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n^2 + 1}{3n^2 + 2} \right)^{5n^2+1}$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + n + 1} \right)^{\frac{n^2+2}{3}}$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 6}{n^2} \right)^{n^2}$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+9}{3n+5} \right)^{4n-7}$

8. Obliczyć granicę, korzystając z twierdzenia o trzech ciągach:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n^3+2} \sin 2n$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^3 + 1} \cdot \cos n!$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{3n^3 + 7}$